6/4/20

[3° εξ' αποστάσεως]

$\mathbb{C}[x]$: $ax+b$

όλα τα ανάγωγα πολ/μα 1ου βαθμού

$\mathbb{R}[x]$ ανάγωγα ;

Όλα τα πολ/μα 1ου βαθμού κ όλα τα πολ/μα 2ου βαθμού με διακρίνουσα αρνητική

__ΑΠΟΔ.__ : ΑΣΚΗΣΗ

(+) Αν είναι 3ου βαθμού τότε ποτέ δε θα είναι ανάγωγο

__π.χ.__ $\mathbb{C}[x,y]$: y^2-x^3 ανάγωγο

x^2+y^2-1 ανάγωγο

$y-x^2$ -"-

$\mathbb{R}[x,y]$: $(y-x)(y+x)=y^2-x^2$ δεν είναι ανάγωγο

x^2+y^2-1 ανάγωγο

x^n+y^n-1 ανάγωγο

__π.χ.__ $x^{20}+y^{20}-1$

Π • **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Μια ακέραια περιοχή D λέγεται περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης (ΠΜΑ) αν:

i) Κάθε στοιχείο της D που δεν είναι μηδέν ή μονάδα αναλύεται / γράφεται ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αναγώγων

ii) Αν $p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$, όπου p_i, q_i είναι ανάγωγα τότε $r = s$ κ' μπορώ να τα αριθμήσω ξανά έ.ω. τα p_i, q_i να είναι ισοδύναμα $\forall 1 \leq i \leq r = s$

Π.χ. $\mathbb{Z}$: ΠΜΑ $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = (-2) \cdot 5 \cdot (-5) \cdot 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν D ΠΜΑ $\Rightarrow D[x]$ ΠΜΑ

ΠΑΡΑΔ.: $\mathbb{Z}$ ΠΜΑ $\Rightarrow \mathbb{Z}[x]$ ΠΜΑ

$\Rightarrow \mathbb{Z}[x][y] = \mathbb{Z}[x,y]$ ΠΜΑ

$\mathbb{R}$ είναι ΠΜΑ ? → Ναι

$\mathbb{C}$ ΠΜΑ

Οποιοδήποτε σώμα είναι ΠΜΑ !

Πολ/μα σε n μεταβλητές είναι ΠΜΑ

Τα πάντα είναι ΠΜΑ ? → ΟΧΙ !

Π.χ. Το $\underbrace{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}_{\{a+\sqrt{-5}\,b \,/\, a,b \in \mathbb{Z}\}}$ δεν είναι ΠΜΑ ($\subseteq \mathbb{C}$)

$3 - 7\sqrt{-5}$

$0 + 11 \cdot \sqrt{-5}$

$(a_1 + b_1\sqrt{-5})(a_2 + b_2\sqrt{-5}) = a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{-5} + a_2b_1\sqrt{-5} - 5b_1b_2$

$= (a_1a_2 - 5b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-5}$

Μονάδες αυτού του συνόλου j
Έστω $a+b\sqrt{-5}$ μονάδα.
Θα προσπαθήσω να βρω a, b

$\Rightarrow (a+b\sqrt{-5})(\gamma+\delta\sqrt{-5}) = \overset{=1-0\cdot i}{1}$
$(a-b\sqrt{-5})(\gamma-\delta\sqrt{-5}) = 1$

Είναι $\mathbb{C}$. Άρα συζυγείς

$\Rightarrow (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})(\gamma+\delta\sqrt{-5})(\gamma-\delta\sqrt{-5}) = 1$
$\Rightarrow (\underbrace{a^2+5b^2}_{\in\mathbb{N}})(\underbrace{\gamma^2+5\delta^2}_{\in\mathbb{N}}) = 1$

$\Rightarrow a^2+5b^2 = 1$ και $\gamma^2+5\delta^2 = 1$

$a^2+5b^2=1$
Αν $b \neq 0 \rightarrow 5b^2 \geq 5$ οπότε $b=0$
άρα $a^2=1 \Rightarrow a=1$ ή $a=-1$
Άρα μονάδες του $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $1, -1$
Θ.ν.δ.ο. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ δεν είναι ΠΜΑ
$2\cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$
Θ.δ.ο. $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ ανάγωγα
Έστω $3 = (a+b\sqrt{-5})(\gamma+\delta\sqrt{-5})$
Πολ/ζω $\bar{3} = (a+b\sqrt{-5})(\gamma+\delta\sqrt{-5})$
$3 = (a-b\sqrt{-5})(\gamma-\delta\sqrt{-5})$

$\Rightarrow 9 = (\underbrace{a^2+5b^2}_{\in\mathbb{N}})(\underbrace{\gamma^2+5\delta^2}_{\in\mathbb{N}})$ 3 περιπτώσεις
<u>1η περίπτωση</u>: $a^2+5b^2 = 1$ κ' $\gamma^2+5\delta^2 = 9$
$a=\pm 1, b=0 \Rightarrow a+b\sqrt{-5} = \pm 1$ μονάδα
<u>2η περίπτωση</u>: $a^2+5b^2 = 9$ κ' $\gamma^2+5\delta^2 = 1$
$\gamma=\pm 1, \delta=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma+\delta\sqrt{-5} = \pm 1$ μονάδα

Π. **3η περίπτωση**: $a^2+5b^2=3$ κ. $\gamma^2+5\delta^2=3$

$a^2=3,\ b=0$ Όμοια

$\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\in\mathbb{Z}$

ΑΤΟΠΟ

$\left(\begin{array}{c}\text{γιατί αλλιώς} \\ 5b^2>3\end{array}\right)$

Όμοια κ. για το 2. Άρα 2 κ. 3 ανάγωγα.

$1+\sqrt{-5}\neq 3$ $\quad$ $1-\sqrt{-5}\neq 3$ $\quad$ Άρα κ. αυτά

$1+\sqrt{-5}\neq -3$ $\quad$ $1-\sqrt{-5}\neq -3$ $\quad$ ανάγωγα!

Θ. Fermat: $x^n+y^n=z^n,\ n\geq 3$

Kummer:

$P_1=(2,\ 1+\sqrt{-5})=\{(a+b\sqrt{-5})\cdot 2+(\gamma+\delta\sqrt{-5})\cdot(1+\sqrt{-5})\}$

$P_2=(3,\ 1+\sqrt{-5})$

$P_3=(3,\ 1-\sqrt{-5})$

$(2)(3)=(6)=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ $\quad$ Δε θα ζητηθεί κάτι

$(P_1P_2)(P_2P_3)$ $\quad$ P_1P_2 $\quad$ P_1P_3 $\quad$ τέτοιο στο τέλος

Θα δουλέψουμε στο $\mathbb{C}[x,y]$ ΠΜΑ $f(x,y)=g_1(x,y)\cdot g_2(x,y)\cdots g_s(x,y)$

$\mathbb{R}[x,y]$ ΠΜΑ $\quad$ g_i ανάγωγα

Πρόταση: Αν $f(x,y) = g_1(x,y) \cdot g_2(x,y) \cdots g_s(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ $\mathbb{C}[x,y]$
όπου $g_i(x,y)$ ανάγωγα πολ/μα. Τότε:

$$V(f) = V(g_1) \cup V(g_2) \ldots \cup V(g_s)$$

Αποδ.

($\supset$) Εστω $(x_0,y_0) \in V(g_1) \cup V(g_2) \cup \ldots \cup V(g_s)$

$$\Rightarrow (x_0,y_0) \in V(g_i) \Rightarrow g_i(x_0,y_0) = 0$$

$$f(x_0,y_0) = g_1(x_0,y_0) \cdots \underbrace{g_i(x_0,y_0)}_{=0} \cdots g_s(x_0,y_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x_0,y_0) \in V(f)$$

($\subset$) Εστω $(x_0,y_0) \in V(f) \Rightarrow f(x_0,y_0) = 0$

$$g_1(x_0,y_0) \, g_2(x_0,y_0) \cdots g_j(x_0,y_0) \cdots g_s(x_0,y_0) = 0, \quad g_j(x_0,y_0) \in \mathbb{C}$$

$$g_j(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow (x_0,y_0) \in V(g_j) \subseteq V(g_1) \cup \ldots \cup V(g_s)$$

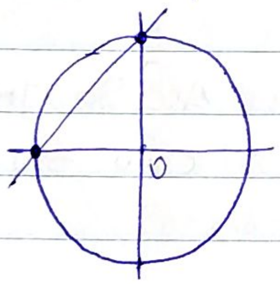
Ακέραια Περιοχή

ΠΑΡΑΔ.: $f(x,y) = (x-y+1)(x^2+y^2-1)$

ΛΥΣΗ: $V(f) = V(x-y+1) \cup V(x^2+y^2-1)$

$\downarrow$

Μοναδιαίος Κύκλος



• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Εστω $f(x,y) = g_1(x,y) \ldots g_s(x,y)$
όπου $g_i(x,y)$ ανάγωγο πολ/μο. Τότε οι καμπύλες $V(g_i)$ ονομάζονται ανάγωγες συνιστώσες της καμπύλης $V(f)$

ΠΑΡΑΔ.: $f(x,y) = (x-y+1)(x^2+y^2-1)$

Τότε $V(x-y+1)$ $V(x^2+y^2-1)$ είναι οι ανάγωγες συνιστώσες της καμπύλης.

Προβολική Γεωμετρία 1800

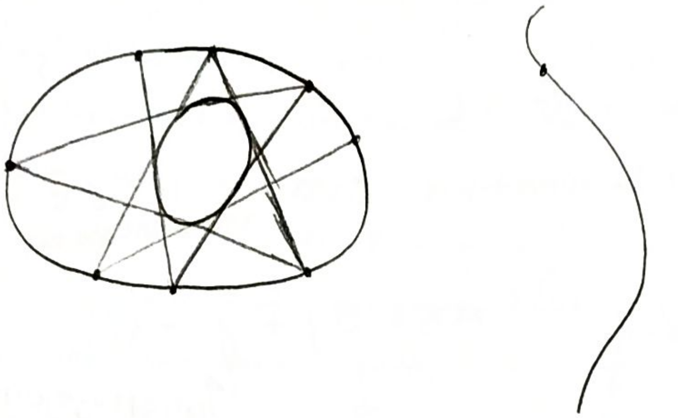
Προσπαθούμε να βάλουμε το ∞ σαν σημείο στον χώρο.
Πιο εύκολα το κατάφεραν οι καλλιτέχνες κ' οι αρχιτέκτονες.

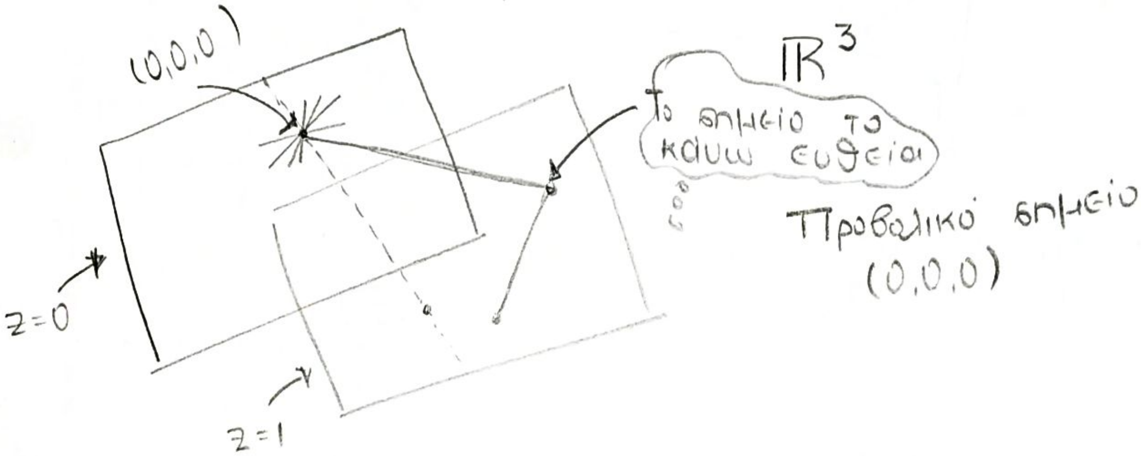
Brunelesky : ο πρώτος αρχιτέκτονας που το κατάφερε

↓

Empire of the Eye: Theatro Olympio — Youtube

ΘΕΩΡΗΜΑ του Poncelet :





Βάλτε το μάτι σας στην αρχή των αξόνων.
Οπουδήποτε κ' να μου θα το βλέπω σαν ένα σημείο.
Προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε την έννοια του σημείου με την ευθεία που περνάει.

↳ Εστω $z = 0$.

— Άρα αλλάζω το σημείο κ' βάζω τις ευθείες που περνούν απ' την αρχή των αξόνων

$(\alpha, \beta, 1)$

$x = 0 + \lambda\alpha$

$y = 0 + \lambda\beta$

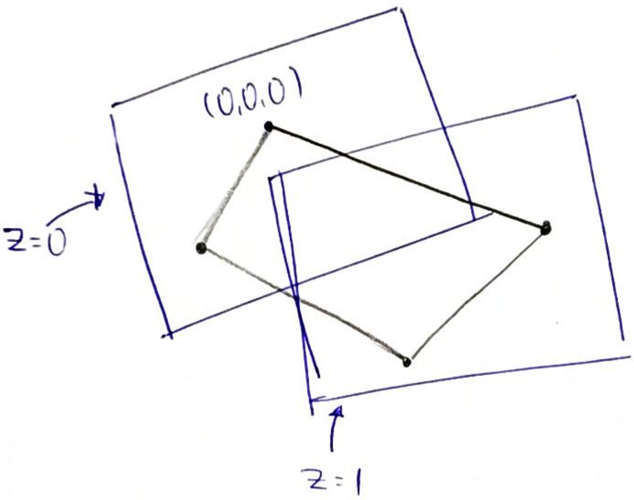
$z = 0 + \lambda \cdot \gamma$

$(\lambda\alpha, \lambda\beta, 1)$

Έχω τον τρισδιάστατο χώρο που διέρχεται ο αρχή των αξόνων.

Πήγα από 2 σημεία σε 3.
Έχασα μοναδικότητα...

Τα σημεία τα κάνω ευθείες.
Οι ευθείες αυτές δημιουργούν ένα επίπεδο



$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

$\downarrow$ αποομογενοποίη (z=1)

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

(ομογενοποίηση)

ΑΡΑ τα σημεία είναι ευθείες
κ' οι ευθείες είναι επίπεδο

Λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha x + \beta y = 0$$

$\rightarrow (\beta, -\alpha, 0)$ το καινούριο άπειρο σημείο

Δηλ. πρόσθεσα ένα σημείο στο ∞